Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

PETRE SIMION
VICTOR NICOLAE
VALENTIN NICULA
VASILE DILIMOȚ-NIȚĂ

Anca Silvia Negulescu • Paul Băiatu • Camelia Bărjoianu • Victor Bogdan Veronica Cojanu • Alexandru Constantinescu • Gabriela Dăneț • Tudor Dăneț • Silviu Dilimoț-Niță • Alina Marilena Drăgan • Sânziana Dumitran Corina Mihaela Ionescu • Gheorghe Ionescu • Pavel Lazarov • Dorin Marghidanu • Ioana Mihaela Neacșu • Victor Pîndaru • Iolanda Popescu Maria Popescu • Iuliana Mariana Stoica

MATEMATICĂ

clasa a X-a

BREVIAR TEORETIC. EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE ȘI REZOLVATE. TESTE DE EVALUARE. TESTE SUMATIVE

■ filiera teoretică ■ profilul real
■ specializarea matematică-informatică

Ediția a II-a revizuită

Consultant:
Prof.univ.dr.mat.em. **OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ**

NICULESCU

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

CUPRINS

Algebră

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

Capitolul I

NUMERE REALE

1. Proprietăți ale puterilor cu exponent real ale unui număr pozitiv. Aproximări raționale pentru numere iraționale

IMPORTANT!

• Definiție: Fie $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Numărul real pozitiv x, cu proprietatea $x^n = a$, se numește puterea cu exponentul rațional $\dfrac{1}{n}$ a numărului real pozitiv a și se notează cu $a^{\frac{1}{n}}$.

Proprietăți ale puterilor unui număr real pozitiv

Pentru orice $a > 0$, $b > 0$, avem relațiile:

1) $a^0 = 1$

2) $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$

3) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $n \in \mathbb{Q}$

4) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, $n \in \mathbb{Q}$

5) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, $n \in \mathbb{Q}$

6) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $m, n \in \mathbb{Q}$

7) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $m, n \in \mathbb{Q}$

8) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $m, n \in \mathbb{Q}$

Observație: Proprietățile 3), 4), 5), 6), 7), 8) rămân valabile și pentru $m, n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Aproximări raționale pentru numere iraționale

• Dacă $a = a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a' = a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ se numește *aproximarea prin lipsă* cu o eroare mai mică de 10^{-n}, iar $a'' = a_0, a_1, a_2, ...; a_n + 10^{-n}$ se numește *aproximarea prin adaos* cu o eroare mai mică de 10^{-n}.

Observație: $a'_n < a < a''_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

De exemplu, pentru $\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ avem următoarele aproximări:

$a'_0 = 2 < \sqrt{5} < 3 = a''_0$ $\quad$ $a'_1 = 2,2 < \sqrt{5} < 2,3 = a''_1$

$a'_2 = 2,23 < \sqrt{5} < 2,24 = a''_2$ $\quad$ $a'_3 = 2,236 < \sqrt{5} < 2,237 = a''_3$

$a'_4 = 2,2360 < \sqrt{5} < 2,2361 = a''_4$ $\quad$ $a'_5 = 2,23606 < \sqrt{5} < 2,23607 = a''_5$

• Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $a > 0$, atunci a^x este unicul număr real care verifică relația:

$$a^{x'_n} < a^x < a^{x''_n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

- Folosind aproximările de mai sus, putem descrie aproximări ale numărului real $-\sqrt{5}$.

$a_0' = -3 < -\sqrt{5} < -2 = a_0''$ $\qquad a_1' = -2{,}3 < -\sqrt{5} < -2{,}2 = a_1''$

$a_2' = -2{,}24 < -\sqrt{5} < -2{,}23 = a_2''$ $\qquad a_3' = -2{,}237 < -\sqrt{5} < -2{,}236 = a_3''$ ...

Exerciții și probleme pentru fixarea cunoștințelor

1. Calculați: $2^{-2} \cdot 4^{-2} \cdot 8^{-2} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{-2}$.

2. Calculați: $5^{-3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot 25^{-3} \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^{-3}$.

3. Efectuați:

$$\left\{(-27)^{103} : 81^{50} : (-9)^{51} + (-343)^{45} : (-49)^{52} : 7^{27} + \left[(-9)^{30} \cdot (-625)^{15}\right] : (-225)^{29}\right\}^{101} : (-121)^{49}.$$

4. Efectuați: $\left(\frac{3}{4}\right)^{100} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{200} \cdot \left(\frac{25}{3}\right)^{100}$.

5. Calculați: $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{102} : \left(\frac{4}{9}\right)^{51}\right]^3$.

6. Calculați: $\dfrac{2^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot 5^{-1}}{5^{-\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$.

7. Calculați:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3^2} : \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} : \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^4$;

b) $10 \cdot \left(18^2 : 324 + 2 \cdot \left(\left(2^2 \cdot 3\right)^{15} : \left(2^{29} \cdot 3^{15}\right) + 1^{2013}\right)\right)$;

c) $5^{-3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot 25^{-3} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-3}$

8. Calculați:

a) $\left((0{,}6)^2\right)^{10} - \left((-4{,}5)^{-2}\right)^0 + \left(3\frac{1}{2}\right)^0$;

Libris.RO Respect pentru oameni și cărți

b) $\dfrac{10\cdot 2^{n}-5\cdot 2^{n-1}}{6\cdot 2^{n+1}+3\cdot 2^{n}}$;

c) $\dfrac{2^{-3}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-4}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{0}}{\left(\dfrac{1}{5}\right)^{0}-12\cdot 3^{-3}}$;

d) $\left(15\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}\right)^{-1}\cdot(25)^{3}-2^{3}\cdot(5^{3})^{2}+4\cdot\dfrac{25^{3}}{5}\right)\cdot 4^{-1}\cdot\dfrac{25}{5^{6}}$.

9. Să se efectueze: $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}-5\cdot(-2)^{-2}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}}{\left(\dfrac{3}{8}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}}$.

10. Efectuați: $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{3}\cdot\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2^{-1}}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right]^{-1}$.

11. Calculați: $\left(\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}\right)^{2}\right)^{2}:\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^{2^{2}}}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3^{2}}$.

12. Efectuați: $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5}}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-5}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-6}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-7}}$.

13. Demonstrați că dacă $a,b\in\mathbb{R}_{+}, a^{2}-b\geq 0$, atunci:

a) $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^{2}-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^{2}-b}}{2}}$;

b) $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^{2}-b}}{2}}-\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^{2}-b}}{2}}$ (formulele radicalilor compuși).

14. Calculați: $\sqrt{\dfrac{7+\sqrt{40}}{2}}+\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{40}}{2}}$.

Libris.ro Respect pentru oameni și cărți

15. Calculați: $\sqrt{\frac{13+\sqrt{160}}{2}}-\sqrt{\frac{13-\sqrt{160}}{2}}$.

16. Fie numărul $x=3,1234567...$. Determinați aproximarea lui x prin lipsă, respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decât:

a) 10^{-3}; b) 10^{-5}.

17. Aproximați prin lipsă, respectiv prin adaos, suma numerelor $a=\sqrt{2}, b=\sqrt{5}$, cu o eroare mai mică decât:

a) 10^{-2}; b) 10^{-3}.

18. Determinați aproximările prin lipsă, respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-2} și 10^{-3}, a numerelor:

a) $\sqrt{8}$; b) $\sqrt{11}$.

19. Aproximați prin lipsă, respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-2} numerele $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ și $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

20. Găsiți un număr rațional și unul irațional în intervalul $(0,5; 0,51)$.

21. Aproximați prin lipsă și prin adaos numerele:
a) $1,3452(69)$; b) $-12,1$; c) $-45,02(12)$.

22. Aproximați cu o precizie de 10^{-2} și 10^{-3} numerele:
a) $12,(23)$; b) $\sqrt{11}+0,(5)$; c) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

23. Calculați:

a) $\dfrac{\frac{1}{2}-a^{-1}}{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{a}\right)^2}:\left(\dfrac{1}{2^{-2}(2+a)}-2\cdot a^{-1}-1\right)$ pentru $a=-\frac{1}{2}$;

b) $\left(a+\left(1+\left(\dfrac{3-a}{a+1}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$ pentru $a=-\frac{1}{3}$.

24. Demonstrați identitățile:

a) $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$;

b) $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$;

Libris.ro Respect pentru oameni și cărți

c) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, pentru $n \notin \mathbb{N}$;

d) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n})$, pentru $n \notin \mathbb{N}$;

e) $\dfrac{a^5 - b^5}{a^5 + b^5} + \dfrac{a^5 + b^5}{a^5 - b^5} = \dfrac{2\left(a^{10} + b^{10}\right)}{a^{10} - b^{10}}$, pentru $a \neq \pm b$.

25. Arătați că:

a) $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

b) $\left(1+\sqrt{2}\right)^2\left(\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = 1$;

c) $\dfrac{1-a}{1-a^{-1}} + \dfrac{1+a^{-1}}{1-a} + \dfrac{1+a}{1-a^{-1}} + \dfrac{1-a^{-1}}{1+a} = 4$.

26. Arătați că dacă $x \neq 0$ și $x \neq 1$, atunci $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^4}\right) = \dfrac{x^8 - 1}{(x-1)^6 x^7}$.

27. Calculați:

a) $\dfrac{2^3 \cdot 5^4 \cdot 3^7}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 3^8} + \dfrac{\left(2^5\right)^6}{16^8} + 1^{2013} \cdot 2014^0$;

b) $a^{\frac{3}{4}} \cdot \left(a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}}\right)^6 : \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$;

c) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{5}}}{a^{1,5} \cdot \left(b^{15}\right)^{\frac{1}{12}}} \cdot \left(\dfrac{a^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{3}{5}}}\right)^{15}$;

d) $\dfrac{\dfrac{1}{3} - a^{-1}}{\dfrac{1}{9} - \left(\dfrac{1}{a}\right)^2} : \left(\dfrac{1}{2^{-2}(3+a)} - 2a^{-1} - 1\right)$, pentru $a = \dfrac{1}{2}$.

Libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

Exerciții și probleme pentru aprofundarea cunoștințelor

1. Se consideră mulțimea $A=\left\{2,\left(\frac{1}{4}\right)^{-2},8^{\frac{17}{3}},(-2)^6\right\}$. Ordonați crescător elementele mulțimii.

2. Aflați valoarea expresiei:

a) $E(x)=\dfrac{2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{x^2-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$, pentru $x=\dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$;

b) $E(x,y)=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{(x^2-xy)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{(x-y)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}$, pentru $x=-2$ și $y=3$.

3. Calculați:

a) $\dfrac{3^{n+1}\cdot 5^n+3^n\cdot 5^{n+2}+6\cdot 3^n\cdot 5^n}{2^{2n+1}\cdot 3^n+3^{n+1}\cdot 4^n+6^{n+1}\cdot 2^{n+1}}$;

b) $(1+3\cdot 3^{99}+3^{76}:3^{16}-3\cdot 3^{59}):(1+9^{25}\cdot 3^{50}+240^5-2^{20}\cdot 15^5)$;

c) $\left(\dfrac{2a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}\right)^2+\dfrac{a^2-(b+c)^2}{a^2+(b+c)^2}$.

4. Ordonați crescător: $64^{-105}\cdot 27^{200}$ și $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{315}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-600}$.

5. Arătați că dacă $m,n\in\mathbb{N}$ și $a=[(-5)^{m+1}+(-5)^{m+2}-(-4)^{n+12}+(-4)^{n+13}]$, atunci $a\ \vdots\ 20$.

6. Arătați că dacă $n\in\mathbb{N}$ și $b=[(-32)^n+(32)^{n+1}]$, atunci $b\ \vdots\ 31$.

7. Determinați $n\in\mathbb{N}$ pentru care $(2^n-6^n)\ \vdots\ 10$.

8. Arătați că $(-2)^{n+1}+(-2)^{n+2}+...+(-2)^{n+725}\ \vdots\ 22$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

9. Calculați:

a) $\sqrt{17+4\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$; b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

c) $\left(a^{\frac{5}{2}}-ab^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}}b-b^{\frac{5}{2}}\right):\left(\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}\right)\left(b^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{3}{4}}\right)\right)$.

Libris.RO Respect pentru oameni și cărți

10. Efectuați:

$$\left\{\left(1-a^2\right)\left[\frac{1-a^{\frac{3}{2}}}{1-a^{\frac{1}{2}}}+a^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}\left[\frac{1+a^{\frac{3}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-a^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}+1\right\}:\sqrt{\left(1-2a+a^2\right)^{-1}}\text{ , pentru } a>1.$$

11. Aflați valoarea expresiei:

a) $E=\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}:\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\cdot\left(\dfrac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1}$, pentru $a=1-\sqrt{2}$ și $b=1+\sqrt{2}$;

b) $E=\left(x^{-1}+y^{-1}\right)\left(x^{-2}-(xy)^{-1}+y^{-2}\right)$.

12. Efectuați $\dfrac{1}{a^2c}\sqrt{3a^8c^4d}+\dfrac{2}{ac^2}\sqrt{12a^6c^6d}-a^4c^2\sqrt{\dfrac{3d}{a^4c^2}}$, unde $a,b,c,d\in(0,\infty)$.

13. Calculați $E=\left[\dfrac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+1}{\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-1}\right]^{-\frac{1}{2}}+\left[\dfrac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-1}{\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+1}\right]^{-\frac{1}{2}}$, pentru $x\in(-1,0)$.

14. Calculați $E=\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, pentru $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, unde $a,b>0$.

15. Comparați numerele: a) 5,34297 și 5,34298; b) – 6,2739 și – 6,2736.

16. Aproximați prin lipsă și prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-3}, numărul $\dfrac{3+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}+\dfrac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$.

17. Arătați că numărul $A=2^{20}+2^{17}+2^{12}$ este pătrat perfect.

18. Arătați că numărul $\sqrt{2012^{2010}+2014^{2011}}$ este irațional.

19. Demonstrați că numărul $\sqrt{1^n+5^n+6^n}$ este irațional, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

20. Fie $a_n=\sqrt{7^n+2002}, n\in\mathbb{N}$.

a) Aflați prima zecimală a numărului a_1;

b) Arătați că $a_n\notin\mathbb{Q}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

21. Demonstrați că $\dfrac{x^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\dfrac{y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\dfrac{3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}<2, \forall x,y\in\mathbb{R}^*$.

22. Arătați că $E=\left(\dfrac{1}{11}\right)^0+\left(\dfrac{1}{11}\right)^1+...+\left(\dfrac{1}{11}\right)^{1994}<\dfrac{10}{9}$.

Libris.RO Respect pentru oameni și cărți

Exerciții și probleme pentru performanță

1. Determinați primele trei cifre după virgulă ale produselor:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$; b) $-\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}$; c) $-0{,}710710071\ldots\cdot 6$.

2. Se dau numerele $\frac{m}{n}$ și $\frac{m'}{n'}$, care au aceleași aproximări prin lipsă și prin adaos cu eroare mai mică de 10^{-p}. Arătați că numărul $\frac{mk+m'k'}{nk+n'k'}$, în care k și k' sunt numere întregi, are aceleași aproximări zecimale prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-p}.